Catatan Kuis 1

MA2281 Statistika non Parametrik

Naufarrel Zhafif Abhista
13523149

Daftar Isi

Bab 1

Sebelum Memulai...

Sebelum kita masuk ke analisis statistik yang lebih mendalam, ada beberapa konsep dasar yang perlu kita pahami dulu. Jangan khawatir, kita bakal bahas ini dengan bahasa yang santai dan contoh yang mudah dipahami!

1.1 Populasi dan Sampel: Siapa yang Kita Teliti?

Bayangin kita mau tahu rata-rata waktu belajar siswa di satu sekolah. Apa kita harus nanya ke **semua** siswa? Nggak harus!

- **Populasi**: Semua siswa di sekolah tersebut.
- **Sampel**: Sejumlah siswa yang kita pilih untuk penelitian.

Kita pakai sampel karena lebih praktis. Tapi, sampelnya harus **representatif**, artinya nggak boleh pilih siswa yang rajin doang, atau yang malas doang. Harus acak dan mewakili semua kelompok.

1.2 Jenis Data: Apa yang Kita Ukur?

Setiap penelitian punya **data**, tapi data itu ada macam-macam:

- **Data Kualitatif (Kategorik)**: Data dalam bentuk kategori atau label. Contoh: Warna rambut (hitam, coklat, pirang), jenis kelamin (pria/wanita).
- **Data Kuantitatif (Numerik)**: Data dalam bentuk angka.
  - **Diskrit**: Nilainya terbatas dan bisa dihitung. Contoh: Jumlah anak dalam keluarga (1, 2, 3...).
  - **Kontinu**: Bisa punya angka desimal. Contoh: Tinggi badan (170.5 cm), waktu tempuh ke sekolah (12.7 menit).

1.3 Tendensi Sentral: Nilai Tengah di Mana?

Saat kita punya banyak data, kita butuh angka yang bisa mewakili semuanya. Ini disebut sebagai **tendensi sentral**. Ada tiga cara umum:

- **Mean (Rata-rata)**: Tambahkan semua data, lalu bagi jumlahnya.

$$\text{Mean} = \frac{\sum X_i}{n}$$

- **Median**: Nilai tengah setelah data diurutkan. Berguna kalau ada nilai ekstrem (misal: gaji CEO vs karyawan biasa).
- **Modus**: Angka yang paling sering muncul.

1.4 Variabilitas Data: Seberapa Beragam Nilainya?

Dua kelompok bisa punya rata-rata yang sama, tapi penyebarannya beda jauh. Contohnya:

- Kelas A: Semua siswa dapat nilai sekitar 80-85.
- Kelas B: Ada yang nilainya 50, ada yang 100, tapi rata-rata tetap 80.

Cara mengukur sebaran data:

- **Range**: Nilai maksimum - nilai minimum.
- **Standar Deviasi** (σ): Seberapa jauh data dari rata-rata.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(X_i - \mu)^2}{n}}$$

Kalau standar deviasi tinggi, berarti datanya tersebar jauh dari rata-rata.

1.5 Distribusi Probabilitas: Menebak Kejadian

Bayangin kita lempar koin 10 kali. Berapa peluang dapat 6 kepala? Untuk menjawab ini, kita pakai **distribusi probabilitas**, yang menunjukkan peluang setiap kemungkinan kejadian.

Jenis-jenis distribusi:

- **Distribusi Uniform**: Semua hasil punya peluang yang sama (misalnya dadu adil).
- **Distribusi Normal**: Grafik berbentuk lonceng, sering muncul di banyak fenomena (misalnya tinggi badan manusia).
- **Distribusi Binomial**: Untuk kejadian yang hanya punya dua hasil (misalnya sukses/gagal). Dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$p(x \leq r) = \sum_{x=0}^{r} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

1.6 Hipotesis Statistik: Bagaimana Cara Membuktikan Sesuatu?

Dalam statistik, kita sering ingin membuktikan sesuatu, tapi kita nggak bisa asal ambil kesimpulan. Kita harus pakai **pengujian hipotesis**.

Bayangkan kita ingin tahu apakah kopi benar-benar bisa meningkatkan fokus saat belajar. Kita bisa membuat dua pernyataan:

- **Hipotesis Nol (H_0)**: Kopi **tidak** berpengaruh terhadap fokus belajar.
- **Hipotesis Alternatif (H_1)**: Kopi **berpengaruh** terhadap fokus belajar.

Dalam pengujian statistik, kita mengumpulkan data dan melihat apakah cukup bukti untuk **menolak** H_0. Kalau H_0 ditolak, berarti kita mendukung H_1.

1.7 Pendekatan Kurva Normal untuk Distribusi Binomial

Kalau sampel besar ($n \geq 10$), distribusi binomial bisa didekati dengan **distribusi normal**. Ini memudahkan perhitungan probabilitas.

Pendekatannya:

$$Z = \frac{x - \frac{n}{2}}{\sqrt{(n)(0.5)(0.5)}}$$

Misalnya, jika $n = 14$ dan kita mau hitung probabilitas $x \geq 11$:

$$Z = \frac{10.5 - 7}{\sqrt{(14)(0.5)(0.5)}} = 1.87$$

Kemudian:

$$P(X \geq 11) \approx P(Z > 1.87) = 0.0307$$

1.8 Kesimpulan

Sebelum belajar analisis data yang lebih kompleks, kita perlu paham dulu:

- Apa itu **populasi** dan **sampel**?
- Jenis-jenis **data**.
- Bagaimana cara menentukan **tendensi sentral** (*mean, median, modus*).
- Seberapa besar **variabilitas data**?
- Apa itu **distribusi probabilitas** dan bagaimana kita menghitung peluang kejadian?
- Bagaimana **hipotesis statistik** bekerja?
- Bagaimana **distribusi binomial** bisa didekati dengan **distribusi normal** untuk perhitungan yang lebih mudah.

Setelah paham ini, kita siap masuk ke uji statistik yang lebih lanjut!

Bab 2

Pendahuluan Statistika Nonparametrik

2.1 Pengantar

Statistika nonparametrik adalah cabang statistik yang digunakan ketika data tidak memenuhi asumsi distribusi normal atau ketika ukuran sampel kecil ($n < 30$). Metode ini lebih fleksibel dibandingkan statistik parametrik karena tidak bergantung pada parameter distribusi tertentu.

2.2 Perbedaan dengan Statistika Parametrik

Statistika parametrik bergantung pada asumsi bahwa data berasal dari populasi dengan distribusi tertentu (misalnya, distribusi normal). Sebaliknya, statistika nonparametrik tidak memerlukan asumsi distribusi, sehingga lebih cocok untuk data ordinal, data dengan outlier yang ekstrem, atau distribusi yang tidak diketahui.

Statistika Parametrik	**Statistika Nonparametrik**
Bergantung pada parameter populasi (mean, variansi)	Tidak bergantung pada parameter populasi
Membutuhkan distribusi tertentu (misalnya normal)	Tidak memerlukan asumsi distribusi tertentu
Lebih efisien jika asumsi dipenuhi	Lebih fleksibel tetapi kurang efisien jika data normal
Menggunakan data kuantitatif	Cocok untuk data ordinal atau kategori

Table 2.1: Perbedaan antara Statistika Parametrik dan Nonparametrik

2.3 Keuntungan dan Keterbatasan

Keuntungan

- Tidak memerlukan asumsi distribusi data.
- Cocok untuk data yang berskala ordinal atau memiliki outlier.
- Dapat digunakan untuk sampel kecil.

Keterbatasan

- Kurang efisien dibandingkan metode parametrik jika data berdistribusi normal.
- Interpretasi hasil bisa lebih kompleks.
- Beberapa uji nonparametrik memiliki keterbatasan dalam menangani data dengan jumlah pengamatan yang sangat besar.

2.4 Kapan Menggunakan Metode Nonparametrik?

Metode ini digunakan dalam kondisi berikut:

- Jika data tidak berdistribusi normal.

- Jika ukuran sampel kecil ($n < 30$).
- Jika data memiliki skala ordinal atau ranking.
- Jika terdapat outlier yang ekstrem yang dapat mempengaruhi metode parametrik.

Dengan memahami konsep dasar ini, kita bisa lebih mudah mengaplikasikan berbagai uji nonparametrik yang akan dibahas pada bab berikutnya.

Bab 3

Uji Nonparametrik (*Nonparametric Test*)

3.1 Uji Bertanda (*Signed Test*)

3.1.1 Pengantar

Uji Bertanda (Signed Test) adalah metode statistik nonparametrik yang digunakan untuk menguji hipotesis tentang median suatu populasi ketika data tidak dapat diasumsikan berdistribusi normal. Uji ini sering digunakan untuk data yang berpasangan atau berulang dalam situasi di mana asumsi distribusi normal tidak terpenuhi.

3.1.2 Asumsi

- Data berskala ordinal atau lebih tinggi.
- Sampel diambil secara acak.
- Data diambil dari distribusi kontinu.

3.1.3 Langkah-langkah Uji Bertanda

1. Tentukan nilai median yang dihipotesiskan (M_0).
2. Bangun hipotesis H_0 dan H_1.
3. Hitung selisih antara setiap observasi dengan M_0 ($d_i = X_i - M_0$).
4. Buang data yang memiliki selisih nol ($d_i = 0$).
5. Tentukan tanda positif (+) atau negatif (-) dari selisih.
6. Hitung jumlah tanda positif (S^+) dan tanda negatif (S^-).
7. Lakukan pendekatan normal dengan banyaknya tanda positif.
8. Bandingkan dengan statistik uji $p = 0.5$, karena asumsi peluang tanda positif dan negatif sama.
9. Putuskan hasilnya. Jika P-value lebih kecil dari tingkat signifikansi α, maka tolak H_0. Jika tidak, gagal menolak H_0.

3.1.4 Contoh Kasus

Akan diberikan dua contoh kasus.

Contoh 3.1: Dari Example 16.1 Walpole

Data berikut mewakili jumlah jam pengoperasian pemangkas pagar listrik sebelum perlu diisi ulang:

$$1.5, 2.2, 0.9, 1.3, 2.0, 1.6, 1.8, 1.5, 2.0, 1.2, 1.7.$$

Gunakan Uji Bertanda untuk menguji hipotesis pada tingkat signifikansi 0,05 bahwa median waktu pengoperasian alat ini adalah 1.8 jam sebelum perlu diisi ulang.

Jawab: Uji ini dua arah. Maka,

- H_0: $\tilde{\mu} = 1.8$ (Median waktu operasi adalah 1.8 jam).
- H_1: $\tilde{\mu} \neq 1.8$ (Median waktu operasi berbeda dari 1.8 jam).
- $\alpha = 0.05$.

Dengan Variabel acak binomial X dengan $p = \frac{1}{2}$.

Perhitungan

Setiap nilai yang lebih besar dari 1.8 diberi tanda "+", sedangkan setiap nilai yang lebih kecil diberi tanda "–". Satu pengukuran yang sama dengan 1.8 diabaikan. Dengan demikian, diperoleh urutan:

$$- \quad + \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad + \quad - \quad -$$

Diperoleh:

- $n = 10$ (jumlah observasi setelah mengabaikan nilai 1.8).
- $x = 3$ (jumlah tanda positif).
- $n/2 = 5$.

P-Value:

$$P = 2P\left(X \leq 3 \text{ saat } p = \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\sum_{x=0}^{3} b\left(x; 10, \frac{1}{2}\right)$$

$$= 0.3438 > 0.05$$

Keputusan Uji

Karena $P = 0.3438 > 0.05$, maka kita tidak menolak H_0. Dengan demikian, kita menyimpulkan bahwa **median waktu operasi alat pemangkas ini tidak berbeda secara signifikan dari 1.8 jam**.

Contoh 3.2: Dari Example 16.2 Walpole

Sebuah perusahaan taksi ingin menentukan apakah penggunaan ban radial dibandingkan dengan ban belted biasa dapat meningkatkan efisiensi bahan bakar. Enam belas mobil diuji dengan ban radial dan dikendarai pada lintasan uji yang telah ditentukan. Tanpa mengganti pengemudi, mobil-mobil yang sama kemudian dipasang ban belted biasa dan kembali dikendarai pada lintasan uji yang sama. Konsumsi bahan bakar, dalam kilometer per liter, diberikan dalam Tabel 3.1.
Dapatkah kita menyimpulkan pada tingkat signifikansi 0,05 bahwa mobil yang dilengkapi dengan ban radial memiliki efisiensi bahan bakar yang lebih baik dibandingkan dengan mobil yang menggunakan ban belted biasa?

Table 3.1: Data untuk Contoh 16.2

Mobil	1	2	3	4	5	6	7	8
Ban Radial	4.2	4.7	6.6	7.0	6.7	4.5	5.7	6.0
Ban Belted	4.1	4.9	6.2	6.9	6.8	4.4	5.7	5.8
Mobil	9	10	11	12	13	14	15	16
Ban Radial	7.4	4.9	6.1	5.2	5.7	6.9	6.8	4.9
Ban Belted	6.9	4.9	6.0	4.9	5.3	6.5	7.1	4.8

Jawab: Perusahaan taksi ingin tahu apakah mobil dengan ban radial lebih hemat bahan bakar dibandingkan dengan ban belted.

- Jika tidak ada perbedaan konsumsi bahan bakar, maka penggunaan ban radial tidak memberikan efek terhadap efisiensi bahan bakar.

- Jika ban radial lebih hemat, maka konsumsi bahan bakar mobil dengan ban radial harus lebih tinggi dibandingkan dengan ban belted.

Kita dapat memisalkan $\tilde{\mu}_1$ dan $\tilde{\mu}_2$ merupakan median konsumsi bahan bakar untuk mobil yang dilengkapi dengan ban radial dan ban belted, berturut-turut. Kita gunakan uji satu arah dalam rangka mengetahui penggunaan ban radial harus lebih tinggi atau tidak dibandingkan ban belted.

- H_0: $\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2 = 0$.
- H_1: $\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2 > 0$.
- $\alpha = 0.05$.

Statistik uji dalam Signed Test di sini menggunakan variabel acak binomial X dengan $p = 1/2$.

Perhitungan

Setelah mengganti setiap selisih positif dengan simbol "+" dan setiap selisih negatif dengan simbol "–", serta mengabaikan dua data dengan selisih nol, diperoleh urutan:

$$+ \quad - \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad - \quad + \quad - \quad +$$

Sehingga diperoleh $n = 14$ dan $S^+ = 11$. Menggunakan pendekatan normal:

$$Z = \frac{S^+ - \frac{n}{2}}{\sqrt{(n)(0.5)(0.5)}} = \frac{10.5 - 7}{\sqrt{(14)(0.5)(0.5)}} = 1.87 \tag{3.1}$$

Kemudian,

$$P(X \geq 11) \approx P(Z > 1.87) = 0.0307 \text{ (Dari Pembacaan Tabel Distribusi Normal Z)}$$

Keputusan Uji

Karena $P = 0.0307 < 0.05$, maka kita menolak H_0. Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan bahwa pada tingkat signifikansi 5%, ban radial memberikan efisiensi bahan bakar yang lebih baik dibandingkan dengan ban belted.

3.2 Uji Peringkat Bertanda Wilcoxon (*Wilcoxon Signed-Rank Test*)

3.2.1 Pendahuluan

Uji Peringkat Bertanda Wilcoxon adalah metode statistik nonparametrik yang digunakan untuk menguji perbedaan median dalam data berpasangan. Uji ini merupakan alternatif dari uji-t berpasangan ketika asumsi distribusi normal tidak dapat dipenuhi.

3.2.2 Asumsi

- Data berskala setidaknya ordinal.
- Sampel berasal dari distribusi kontinu.
- Data berpasangan (misalnya sebelum dan sesudah perlakuan).
- Perbedaan antara pasangan data tidak selalu bernilai nol.

3.2.3 Penjelasan Uji Peringkat Bertanda Wilcoxon

Uji ini digunakan ketika kita dapat mengasumsikan bahwa data berasal dari **distribusi kontinu yang simetris**. Langkah-langkah utama dalam pengujian ini meliputi:

- Mengurangkan $\tilde{\mu}_0$ dari setiap nilai dalam sampel, serta mengabaikan selisih yang sama dengan nol.

- Merangking nilai absolut dari selisih yang tersisa, tanpa memperhatikan tanda positif atau negatif.
- Peringkat diberikan dari yang terkecil hingga terbesar, dan jika terdapat nilai yang sama, peringkat yang akan diberikan adalah rata-rata dari peringkat yang mungkin.
- Jika hipotesis nol benar, maka jumlah total peringkat untuk selisih positif dan negatif seharusnya hampir sama.
- Jumlahkan total peringkat positif (w_+) dan negatif (w_-), dan tentukan nilai uji sebagai:

$$w = \min(w_+, w_-)$$

Pemilihan Wilayah Kritis

Table 3.2: Nilai Kritis untuk Uji Wilcoxon Signed-Rank

n	One-Sided $\alpha = 0.01$, Two-Sided $\alpha = 0.02$	One-Sided $\alpha = 0.025$, Two-Sided $\alpha = 0.05$	One-Sided $\alpha = 0.05$, Two-Sided $\alpha = 0.1$
5	-	-	1
6	-	-	2
7	0	2	4
8	2	4	6
9	3	6	8
10	5	8	11
11	7	11	14
12	10	14	17
13	13	17	21
14	16	21	26
15	20	25	30
16	24	30	36
17	28	35	41
18	33	40	47
19	38	46	54
20	43	52	60
21	49	59	68
22	56	66	75
23	62	73	83
24	69	81	92
25	77	90	101
26	85	98	110
27	93	107	120
28	102	117	130
29	111	127	141
30	120	137	152

- Jika w_+ kecil dan w_- besar, maka H_0 dapat ditolak untuk alternatif $\tilde{\mu} < \tilde{\mu}_0$.
- Jika w_+ besar dan w_- kecil, maka H_0 dapat ditolak untuk alternatif $\tilde{\mu} > \tilde{\mu}_0$.
- Untuk uji dua sisi, kita menolak H_0 jika nilai w_+ atau w_- cukup kecil.

3.2.4 Keputusan Uji

- Jika P-value lebih kecil dari tingkat signifikansi α, maka tolak H_0.
- Jika tidak, gagal menolak H_0.

Apabila $n < 5$ dan tingkat signifikansi tidak melebihi 0.05 untuk uji satu sisi atau 0.10 untuk uji dua sisi, maka semua nilai dari w_+, w_-, atau w akan menyebabkan penerimaan hipotesis nol. Namun, jika $5 \leq n \leq 30$, tabel nilai kritis Wilcoxon dapat digunakan untuk membandingkan nilai hitungan dengan nilai kritis pada tingkat signifikansi tertentu (misalnya $0.01, 0.025$, atau 0.05).

Hipotesis nol ditolak jika nilai w_+, w_-, atau w yang dihitung lebih kecil atau sama dengan nilai tabel yang sesuai. Sebagai contoh, jika $n = 12$, maka nilai $w_+ \leq 17$ diperlukan untuk menolak hipotesis nol pada tingkat signifikansi 5% dalam uji satu sisi.

3.2.5 Tabel Keputusan Uji

Untuk menguji hipotesis nol bahwa dua populasi kontinu simetris memiliki median yang sama dalam kasus berpasangan, kita meranking perbedaan observasi berpasangan tanpa memperhatikan tanda dan menggunakan prosedur uji seperti dalam kasus satu sampel. Tabel berikut merangkum berbagai prosedur uji yang digunakan dalam Wilcoxon Signed-Rank Test:

Table 3.3: Prosedur Uji Wilcoxon Signed-Rank Test

H_0	H_1	Perhitungan
$\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$	$\begin{cases} \tilde{\mu} < \tilde{\mu}_0 \\ \tilde{\mu} > \tilde{\mu}_0 \\ \tilde{\mu} \neq \tilde{\mu}_0 \end{cases}$	w_+ w_- w
$\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$	$\begin{cases} \tilde{\mu}_1 < \tilde{\mu}_2 \\ \tilde{\mu}_1 > \tilde{\mu}_2 \\ \tilde{\mu}_1 \neq \tilde{\mu}_2 \end{cases}$	w_+ w_- w

3.2.6 Statistik Uji

Statistik uji dalam Wilcoxon Signed-Rank Test menggunakan nilai W yang dihitung berdasarkan peringkat:

$$W = \min(W^+, W^-)$$

Untuk sampel besar ($n > 25$), distribusi normal dapat digunakan sebagai pendekatan:

$$Z = \frac{W - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}$$

Kemudian, jika P-value lebih kecil dari tingkat signifikansi α, maka tolak H_0. Jika tidak, gagal menolak H_0.

3.2.7 Contoh Kasus

Contoh 3.3: Dari Example 16.3 Walpole

Mari kita gunakan Uji Peringkat Bertanda Wilcoxon untuk merevisi Example 16.1. Kita akan menguji apakah median waktu operasi alat pemangkas listrik secara signifikan berbeda dari 1.8 jam.
Hipotesis:

- $H_0 : \tilde{\mu} = 1.8$ (Median waktu operasi adalah 1.8 jam).
- $H_1 : \tilde{\mu} \neq 1.8$ (Median waktu operasi berbeda dari 1.8 jam).
- $\alpha = 0.05$.

Wilayah Kritis: Karena $n = 10$ setelah mengabaikan satu pengukuran yang sama dengan 1.8, Tabel 3.2 menunjukkan bahwa wilayah kritis berada pada $w \leq 8$.

Perhitungan

Setiap nilai dikurangi 1.8, kemudian perbedaan diurutkan tanpa memperhatikan tanda:

d_i	-0.3	0.4	-0.9	-0.5	0.2	-0.2	-0.3	0.2	-0.6	-0.1
Peringkat	5.5	7	10	8	3	3	5.5	3	9	1

Table 3.4: Selisih dan peringkat absolut dalam Uji Wilcoxon

Sekarang, jumlahkan peringkat positif dan negatif:

$$w_+ = 13, \quad w_- = 42$$

$$w = \min(w_+, w_-) = 13$$

Keputusan Uji

Karena $w = 13 > 8$, kita tidak menolak H_0. Ini berarti tidak ada bukti yang cukup untuk menyimpulkan bahwa median waktu operasi alat ini berbeda secara signifikan dari 1.8 jam.

Kesimpulan

Dengan menggunakan Uji Peringkat Bertanda Wilcoxon, kita sampai pada kesimpulan yang sama dengan Example 16.1, yaitu median waktu operasi tidak berbeda signifikan dari 1.8 jam.